25. Wiener Mathematik-
und Denksportwettbewerb
8. April 2015 - TU Wien

10

mathematische

Denksportaufgaben

und

ihre

Lösungen

Zahlen einsetzen, aber richtig!

Um $x = a \cdot b + c \cdot d$ zu berechnen, setzen wir für a, b, c und d alle Zahlen aus der Menge {10, 13, 17, 21} ein. Wir wissen zwar nicht, welche Zahl wir für welche Variable einsetzen, aber wir wissen, dass x größer als 431 und kleiner als 487 ist.
Wie groß ist x?

Lösung:

Es gibt drei mögliche Ergebnisse, wenn man die Zahlen 10, 13, 17, 21 in den Term $a \cdot b + c \cdot d$ einsetzt:
$10 \cdot 13 + 17 \cdot 21 = 487$, $10 \cdot 17 + 13 \cdot 21 = 443$ und $10 \cdot 21 + 13 \cdot 17 = 431$.
Nur eine Zahl erfüllt die in der Angabe genannte Bedingung. Also gilt die

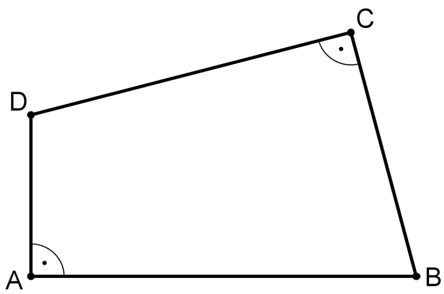
Antwort:

x = 443 .

Ein spezielles Viereck

Im Viereck ABCD ist $\overline{AB} = 13$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm, $\overline{CD} = 11$ cm und $\overline{DA} = 1$ cm. An den Ecken A und C sind rechte Winkel.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks?



Achtung! Nicht maßstabsgetreu!

Lösung:

Das Dreieck ABD ist ein halbes Rechteck und hat daher den Flächeninhalt $\frac{13 \cdot 1}{2}$ cm². Auch BCD ist ein halbes Rechteck, sein Flächeninhalt beträgt $\frac{7 \cdot 11}{2}$ cm². Zusammengezählt ergibt sich daraus die

Antwort:

Der Flächeninhalt des Vierecks beträgt 45 cm².

Alberts Zahl

Albert sucht eine natürliche Zahl, die möglichst klein ist und die Ziffernsumme 37 hat. Welche Zahl ist das?

Lösung:

Wegen $4 \cdot 9 = 36$ muss eine Zahl mit der Ziffernsumme 37 mindestens 5 Ziffern haben. Damit die Zahl möglichst klein ist, muss die kleinstmögliche Ziffer an der Stelle mit dem höchstens Stellenwert stehen. Die kleinstmögliche Ziffer ist 1 und die anderen Ziffern sind dann 9.

Daraus ergibt sich die

Antwort:

Alberts Zahl ist <u>19999</u> .

Ungenau gezahlt

Josef muss regelmäßig Beträge zwischen 500 und 600 Euro zahlen. Weil er sich mit Dezimalzahlen nicht gut auskennt, macht er dabei immer den gleichen Fehler: Zum Beispiel zahlt er statt 520 Euro nur 500,20 Euro oder statt 588 Euro nur 500,88 Euro. Nach einer Zahlung wird er aufmerksam gemacht, dass er um 14,85 Euro zu wenig bezahlt hat. Wie viel hätte er eigentlich bezahlen müssen?

Lösung:

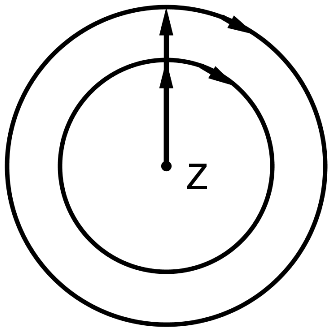
Statt 500 + x Euro zahlt er immer nur $500+\frac{x}{100}$ Euro, also um $x-\frac{x}{100}$ Euro zu wenig. Da x ein ganzzahliger Euro-Betrag und $\frac{x}{100}$ ein Cent-Betrag ist, muss $\frac{x}{100}$ gleich 0,15 sein; also ist x gleich 15. Daraus folgt die

Antwort:

Er hätte eigentlich <u>515</u> Euro bezahlen müssen.

Rotierende Pfeile

Zwei Pfeile rotieren um ein Zentrum Z. Rechts siehst du ihre Ausgangslage zum Zeitpunkt 0 und ihre Rotationsrichtung. Der lange Pfeil benötigt 60 Sekunden für eine Umdrehung, der kurze Pfeil 180 Sekunden.
Nach wie vielen Sekunden schließen sie erstmals einen Winkel von 84° ein?



Lösung:

Da eine Umdrehung 360° beträgt, legt der lange Pfeil 6° pro Sekunde und der kurze Pfeil 2° pro Sekunde zurück. Die Differenz beträgt also 4° pro Sekunde. 84 : 4 = 21.
Daraus folgt die

Antwort:

Nach 21 Sekunden schließen sie diesen Winkel ein.

Primzahlentrio

A, B und C sind drei verschiedene Primzahlen und C ist die kleinste von ihnen.
$A \cdot B + C = 53$.
Wie groß ist $A \cdot B \cdot C$?

Lösung:

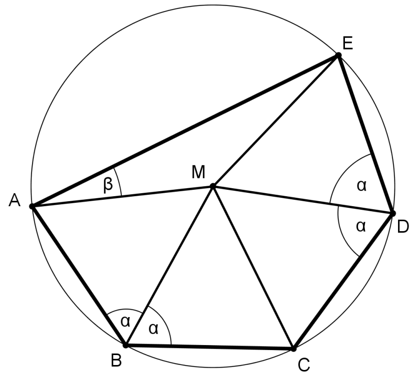
Da 53 eine ungerade Zahl ist, muss eine der drei Primzahlen gerade sein. Da C die kleinste der drei Primzahlen ist, gilt $C = 2$ und $A \cdot B = 51 = 3 \cdot 17$.
$51 \cdot 2 = 102$ ergibt die

Antwort:

$A \cdot B \cdot C = \underline{102}$.

Ein Fünfeck mit vielen gleichen Winkeln

Das Fünfeck ABCDE hat einen Umkreis mit dem Mittelpunkt M. Der Winkel α beträgt 56°.
Wie groß ist der Winkel β?



Lösung:

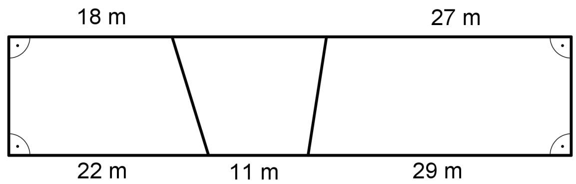
Die Dreiecke ABM, BCM, CDM und DEM sind alle gleichschenkelig und haben jeweils den Basiswinkel $\alpha = 56°$. Daher hat jedes dieser Dreiecke an der Spitze M den Winkel $180° - 2 \cdot 56° = 68°$. Daher beträgt der Winkel an der Spitze des ebenfalls gleichschenkeligen Dreiecks AME $360° - 4 \cdot 68° = 88°$. Nun kann man den Winkel β ausrechnen: $\beta = (180° - 88°) : 2 = 46°$.
Das ergibt die

Antwort:

β = <u>46</u> °.

Schrebergärten in Amsbach

Drei Schrebergärten sind trapezförmig, und das gefällt ihren Besitzern nicht. Sie einigen sich darauf, die Zäune so umzubauen, dass Rechtecke entstehen. Dabei soll sich natürlich der Flächeninhalt der einzelnen Gärten nicht ändern.
Wie lang ist dann das mittlere Rechteck?



Lösung:

Wenn wir aus dem linken Trapez ein flächengleiches Rechteck machen, so ist die Länge des Rechtecks der Mittelwert von 18m und 22m, also 20m. Ebenso erhalten wir aus dem rechten Trapez ein Rechteck, dessen Länge der Mittelwert von 27m und 29m ist, also 28m. Da die 22m lange Strecke um 2m und die 29m lange Strecke um 1m kürzer wird, muss die 11m lange Strecke um 3m länger werden.
Daraus folgt die

Antwort:

Das mittlere Rechteck ist dann <u>14</u> m lang.

Zahlen seltsam angeordnet

Die natürlichen Zahlen werden in zehn Spalten folgendermaßen angeschrieben:

Spalte Nummer	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		10	11	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
		28	29	30	31	32	33	34	35	36
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	
		46	47	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Welche Nummer hat die Spalte, in der die Zahl 2026 steht?

Lösung:

In den ersten beiden Zeilen stehen 18 Zahlen, ebenso in den nächsten beiden Zeilen und so weiter. Wie oft ist 18 in 2026 enthalten? 2026 : 18 = 112, 10 bleibt Rest. 2026 ist also die zehnte Zahl in zwei Zeilen und steht daher in der Spalte mit der Nummer 2. Daraus folgt die

Antwort:

Diese Zahl steht in der Spalte mit der Nummer 2.

Richtig und falsch zählen

30 Kinder stellen sich hintereinander auf und zählen von vorne nach hinten durch, beginnend mit 1, 2, 3 usw. Jedes Kind addiert also 1 zu jener Zahl, die das Kind vor ihm gesagt hat. Nur ein einziges Kind in der Reihe hält sich nicht an diese Regel, sondern verdoppelt die Zahl, die das Kind vor ihm gesagt hat. Das 30. Kind nennt schließlich die Zahl 46.
An welcher Stelle stand das Kind, welches nicht normal weiter gezählt hat?

Lösung:

Bezeichnen wir die gesuchte Stelle mit x. Das Kind an der Stelle x hat also offensichtlich um 16 zu viel gesagt. Eigentlich hätte es x sagen sollen, es hat aber $2 \cdot (x - 1)$, also $2x - 2$ gesagt; das ist um $x - 2$ zu viel.
Aus $x - 2 = 16$ folgt die

Antwort:

Das Kind, das falsch gezählt hat, stand an der Stelle 18 .