27. Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb
19. April 2017 – TU Wien

Zehn mathematische Denksportaufgaben und ihre Lösungen

Ungerade Summanden

Die Zahl 624 kann als Summe von acht aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen angeschrieben werden.
Welche ist die kleinste dieser acht Zahlen?

Lösung:

Es sei x die gesuchte Zahl. Da sich aufeinanderfolgende ungerade Zahlen um jeweils 2 voneinander unterscheiden, können wir die Summe der acht Zahlen folgendermaßen anschreiben:
$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) + (x + 10) + (x + 12) + (x + 14) = 624$
Durch Lösen dieser Gleichung erhalten wir die

Antwort:
Die kleinste der acht Zahlen ist 71.

Der vergessliche Erich

Nachdem sechs Freunde gemeinsam in einem Restaurant gegessen haben, beschließen sie, den Rechnungsbetrag gleichmäßig untereinander aufzuteilen. Da Erich sein Geld zu Hause vergessen hat, muss jeder der anderen Freunde 3,40 Euro mehr bezahlen.
Wie hoch ist der Betrag der Gesamtrechnung?

Lösung:

Da Erichs Freunde seinen Rechnungsanteil gleichmäßig aufteilen und jeder der fünf Freunde 3,40 € mehr bezahlen muss, beträgt Erichs Anteil an der Rechnung 5 · 3,40 € = 17 €. Den Gesamtbetrag der Rechnung erhalten wir, indem wir Erichs Anteil mit 6 multiplizieren, da jeder der sechs Freunde gleich viel bezahlt. Also gilt die

Antwort:
Die Gesamtrechnung beträgt 102 Euro.

Summe aus fünf Zahlen

Gegeben sind fünf natürliche Zahlen a, b, c, d und e. Zieht man von jeder dieser fünf Zahlen die Zahl 8 ab, so erhält man fünf natürliche Zahlen, deren Produkt 13 ist.
Berechne die Summe $a + b + c + d + e$!

Lösung:

Da das Produkt $(a - 8) \cdot (b - 8) \cdot (c - 8) \cdot (d - 8) \cdot (e - 8) = 13$ und 13 eine Primzahl ist, müssen vier der Faktoren 1 und ein Faktor 13 sein. Daraus folgt, dass vier der Zahlen a, b, c, d und e gleich 9 und eine Zahl 21 ist. Durch Berechnung der Summe $9 + 9 + 9 + 9 + 21$ erhalten wir die

Antwort:
Die Summe $a + b + c + d + e$ beträgt 57.

Ungleichung

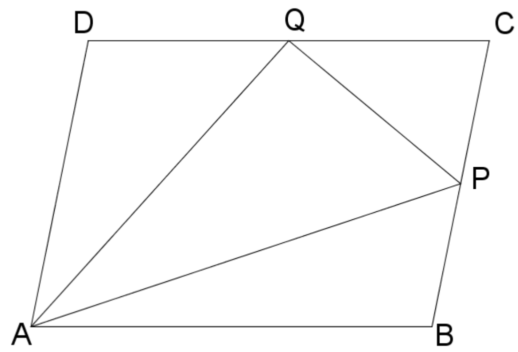
Für wie viele zweistellige natürliche Zahlen x gilt die Ungleichung $20 \cdot x - 16 < 1840$?

Lösung:

Je größer x ist, desto größer ist auch die linke Seite der Ungleichung. 92 ist die größte natürliche Zahl und 10 die kleinste zweistellige natürliche Zahl, die die Ungleichung erfüllt. Die Ungleichung gilt also für alle Zahlen zwischen 10 und 92. Daraus folgt die

Antwort:
Die Ungleichung gilt für 83 zweistellige natürliche Zahlen.

Dreieck im Parallelogramm



Die Punkte P und Q halbieren die Seiten BC und CD des Parallelogramms ABCD. Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 72 cm^2.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks APQ!

Lösung:

Das Dreieck AQD lässt sich durch ein kongruentes Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzen, dessen Flächeninhalt halb so groß wie der Flächeninhalt von ABCD ist. Somit beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks AQD ein Viertel des Flächeninhalts von ABCD, also 18 cm^2. Mit demselben Argument lässt sich begründen, dass ABP einen Flächeninhalt von 18 cm^2 und PCQ einen Flächeninhalt von 9 cm^2 hat. Durch subtrahieren der Flächeninhalte der drei Dreiecke vom Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD ergibt sich die

Antwort:
Der Flächeninhalt des Dreiecks APQ beträgt 27 cm^2.

Eva rechnet an der Tafel

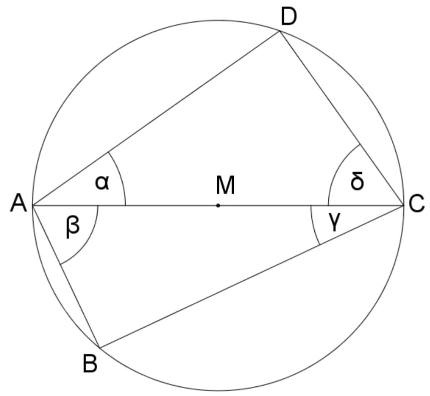
Eva schreibt eine dreistellige Zahl x an eine Tafel. Dann schreibt sie alle Zahlen, die ungleich x sind, aber aus den gleichen drei Ziffern wie x bestehen, an eine zweite Tafel. Die Summe der Zahlen auf der zweiten Tafel ist A. Die Summe der Zahlen auf beiden Tafeln ist B. B ist um 163 größer als A.
Wie groß ist die Summe A?

Lösung:

Da auf der ersten Tafel nur die Zahl x steht und B um 163 größer als A ist, muss x gleich 163 sein. Somit ist A die Summe der Zahlen, die ungleich 163 sind, aber aus den gleichen Ziffern wie 163 bestehen, also A = 136 + 316 + 361 + 613 + 631. Daraus ergibt sich die

Antwort:
Die Summe A ist 2057.

Viereck im Kreis



Das Viereck ABCD hat einen Umkreis mit dem Mittelpunkt M.
Für die Winkel α, β und γ gilt:
$\alpha + \gamma = 65°$, $\beta = 63°$.
Wie groß ist der Winkel δ?
(Achtung: Nicht abmessen! Die Skizze entspricht nicht der Angabe.)

Lösung:

Aus dem Satz von Thales folgt, dass die Winkel $\angle$ ADC und $\angle$ CBA rechte Winkel sind. Die Winkelsumme des Vierecks ABCD beträgt 360°. Daraus folgt, dass $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$ ist. Wegen $\alpha + \gamma = 65°$ und $\beta = 63°$ folgt die

Antwort:
Der Winkel δ beträgt 52°.

Ziffern fehlen

Die beiden siebenstelligen Zahlen 34A53B1 und 32A45BC sind beide durch 9 teilbar.
Wie groß ist die Ziffer C?

Lösung:

Da beide Zahlen durch 9 teilbar sind, sind auch ihre Ziffernsummen und daher auch die Differenz der beiden Ziffernsummen durch 9 teilbar.
Also ist $3 + 4 + A + 5 + 3 + B + 1 - (3 + 2 + A + 4 + 5 + B + C) = 2 - C$ durch 9 teilbar. Dies ist aber nur möglich ist, falls $C = 2$ ist. Es gilt also die

Antwort:
Die Ziffer C ist 2.

Wie groß kann x sein?

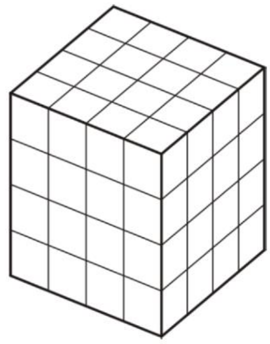
Für a, b, c und d sollen in $x = a + b \cdot c - d \cdot 17$ vier verschiedene zweistellige Zahlen so eingesetzt werden, dass x möglichst groß ist.
Wie groß ist das größtmögliche x?

Lösung:

Eine möglichst große Zahl x erreicht man, falls a, b und c möglichst groß sind und d möglichst klein ist. Also ist $d = 10$. Für a, b und c setzt man die Zahlen 99, 98 und 97 ein. Dabei ist x am größten, falls für $a = 97$ und $b \cdot c = 98 \cdot 99$ eingesetzt werden. Es folgt also die

Antwort:
Das größtmögliche x ist 9629.

Einen Würfel zerschneiden



Rechts siehst du einen Würfel mit der Kantenlänge 4 cm, welcher aus $4^3 = 64$ Teilwürfeln mit der Kantenlänge 1 cm zusammengesetzt ist.
Wir nehmen nun einen größeren Würfel mit der Kantenlänge 14 cm, welcher aus 14^3 Teilwürfeln mit der Kantenlänge 1 cm zusammengesetzt ist. Dieser Würfel wird nun außen rot gefärbt.
Wie viele der 14^3 Teilwürfel haben zwei oder mehr rote Seitenflächen?

Lösung:

Zwei oder mehr rote Seitenflächen haben genau die Teilwürfel, die sich an einer Kante des Würfels befinden. Für einen Würfel mit Kantenlänge 14 cm sind das die 8 Teilwürfel an den Ecken und die jeweils 12 Teilwürfel zwischen den Ecken an den 12 Kanten des Würfels. Aus $8 + 12 \cdot 12 = 152$ folgt die

Antwort:
Die Anzahl der Teilwürfel mit zwei oder mehr roten Seitenflächen ist 152.