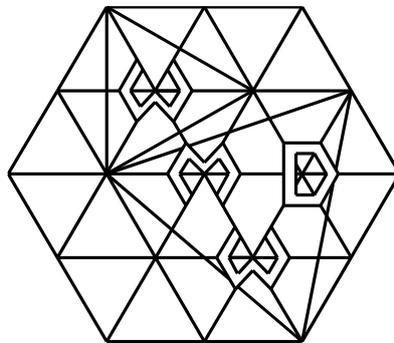


30. Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb

**11. April 2023
Technische Universität Wien**



**Zehn
mathematische
Denksportaufgaben
und ihre
Lösungen**

Adam und Klara spielen um Kugeln

Am Beginn eines Spiels hat Adam 94 Kugeln, während Klara nur 14 Kugeln hat. Im Laufe des Spiels verliert Adam einige Kugeln an Klara. Am Ende des Spiels hat Adam genau doppelt so viele Kugeln wie Klara.

Wie viele Kugeln hat Adam an Klara verloren?

Lösung:

Adam und Klara spielen mit insgesamt 108 Kugeln, von denen Adam am Ende des Spiels zwei Drittel (also 72) und Klara ein Drittel (also 36) hat. Am Beginn des Spiels hatte Adam noch 94 Kugeln. Daraus folgt die

Antwort:

Adam hat 22 Kugeln an Klara verloren.

Differenz von Zahlen

A ist die größte 101-stellige Zahl, die aus 2 Einsern und 99 Nullen gebildet werden kann. B ist die kleinste 101-stellige Zahl, die aus 2 Einsern und 99 Nullen gebildet werden kann.

Wie groß ist die Ziffernsumme von $A - B$?

Lösung:

Die größte 101-stellige Zahl, die aus 2 Einsern und 99 Nullen besteht, ist 11000...000. Die kleinste solche Zahl ist 1000...0001. Die Differenz dieser Zahlen ist die Zahl 999...999, die aus 99 Neunern besteht. Multipliziert man 99 mit 9, so erhält man die

Antwort:

Die Ziffernsumme von $A - B$ ist 891.

Flächeninhalt eines Rechtecks

Von einem Rechteck ABCD ist E der Mittelpunkt der Seite CD. Die Strecken AE und BE stehen normal aufeinander. Die Strecke AB ist 32 cm lang.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD?

Lösung:

Da AE und BE normal aufeinander stehen, folgt aus dem Satz von Thales, dass die Höhe auf die Hypotenuse des Dreiecks ABE 16 cm lang ist. Daraus folgt, dass auch die Seiten AD und BC 16 cm lang sind. Multipliziert man 32 mit 16, so erhält man die

Antwort:

Der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD beträgt 512 cm^2 .

Zahlen und ihre Teiler

X ist die kleinste siebenstellige Zahl, die durch 89 teilbar ist. Y ist die größte sechsstellende Zahl, die durch 89 teilbar ist. T ist der größte Teiler der Zahl 222, für den gilt: $T < 222$. Wie groß ist die Zahl $(X - Y) \cdot T$?

Lösung:

Die kleinste siebenstellige Zahl und die größte sechsstellende Zahl, die jeweils durch 89 teilbar sind, unterscheiden sich um 89. Deshalb ist $X - Y = 89$. Der größte Teiler T der Zahl 222 mit der Eigenschaft $T < 222$ ist die Zahl 111. Es folgt die

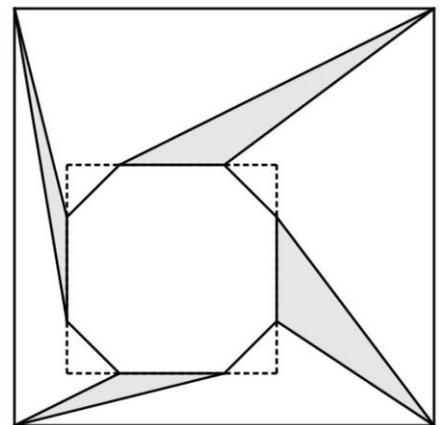
Antwort:

Die Zahl $(X - Y) \cdot T$ ist 9879.

Dreiecksflächen

In einem Quadrat mit der Seitenlänge 18 cm befindet sich ein kleineres Quadrat mit der Seitenlänge 7 cm so, dass die Seiten der beiden Quadrate paarweise zueinander parallel sind. Dem kleineren Quadrat ist ein Achteck eingeschrieben, wobei die Seiten des Achtecks, die auf den Quadratseiten liegen, 2 cm lang sind.

Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte der grauen Flächen?



Lösung:

Alle vier grauen Dreiecke haben die Basislänge 2 cm. Bezeichnet man die zugehörigen Höhen mit h_1, h_2, h_3 und h_4 , so ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke gleich $\frac{2 \cdot h_1}{2} + \frac{2 \cdot h_2}{2} + \frac{2 \cdot h_3}{2} + \frac{2 \cdot h_4}{2} = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$. Da die Seiten der gegebenen Quadrate 18 cm bzw. 7 cm lang sind, ist die Summe der Höhen gegenüberliegender Dreiecke jeweils 11 cm lang. Deshalb ist $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 11 + 11$, und daraus folgt die

Antwort:

Die Summe der Flächeninhalte der grauen Flächen beträgt 22 cm^2 .

Agnes zieht Zettel

In einem Topf liegen 24 Zettel, die mit den Zahlen von 1 bis 24 beschriftet sind. Agnes nimmt 5 Zettel aus dem Topf, addiert die Zahlen auf den Zetteln und erhält die Summe 110. Wie lautet die kleinste Zahl, die auf einem der 5 Zettel steht?

Lösung:

110 ist die größtmögliche Summe, die mit den Zahlen von 5 Zetteln gebildet werden kann. Deshalb muss Agnes die Zettel mit den Zahlen 20, 21, 22, 23, 24 gezogen haben. Daraus folgt die

Antwort:

Die kleinste Zahl ist 20.

Winkel in einem Viereck

In einem Viereck ist der zweitgrößte Innenwinkel um 12° kleiner als der größte, der drittgrößte Innenwinkel ist um 12° kleiner als der zweitgrößte, und der kleinste Innenwinkel ist um 12° kleiner als der drittgrößte.

Wie groß ist der größte Innenwinkel im Viereck?

Lösung:

Wenn x der größte Innenwinkel im Viereck ist, dann ist $x - 12$ der zweitgrößte, $x - 24$ der drittgrößte und $x - 36$ der viertgrößte Innenwinkel. Da die Summe aller Innenwinkel in einem Viereck 360° groß ist und $x + (x - 12) + (x - 24) + (x - 36) = 4x - 72$ ist, folgt durch Lösen der Gleichung $4x - 72 = 360$ die

Antwort:

Der größte Innenwinkel im Viereck beträgt 108° .

Datum mit nur zwei Ziffern

Am 02.02., 00:00 Uhr war heuer der erste Zeitpunkt, für den man zur Darstellung des Datums samt Uhrzeit (aber ohne Jahreszahl) in der Form TT.MM., hh:mm nur zwei verschiedene Ziffern verwenden musste. Bereits zwei Minuten später, am 02.02., 00:02 Uhr war der zweite solche Zeitpunkt. Der wievielte solche Zeitpunkt war am 20.02. um 02:20 Uhr?

Lösung:

Innerhalb einer Stunde gibt es 4 Zeitpunkte, zu denen man für die Minutenanzeige nur die Ziffern 0 und 2 benötigt und zwar hh:00, hh:02, hh:20, hh:22. Auch für die Stundenanzeige gibt es 4 solche Möglichkeiten innerhalb eines Tages, und zwar 00:mm, 02:mm, 20:mm und 22:mm. Daraus folgt, dass es am 02.02. genau 16 Zeitpunkte gab, für die man für die Darstellung der Uhrzeit nur die Ziffern 0 und 2 benötigt hat. Der 20.02. ist der zweite Tag, der nur mit den Ziffern 0 und 2 dargestellt werden kann. Aus der oben durchgeführten Überlegung folgt, dass 02:20 Uhr der 7. solche Zeitpunkt an diesem Tag war. Daraus folgt die

Antwort:

Der angegebene Zeitpunkt ist der 23. solche Zeitpunkt.

Anzahl von Ziffern einer Zahl

Von einer natürlichen Zahl N ist folgendes bekannt:

- N besitzt die Ziffernsumme 222.
- Je zwei aufeinander folgende Ziffern von N sind verschieden.

Wie groß ist die kleinste Anzahl von Ziffern, welche die Zahl N haben kann?

Lösung:

Damit man mit möglichst wenigen Ziffern die Ziffernsumme 222 erhält, muss die gesuchte Zahl aus möglichst großen Ziffern bestehen. Nimmt man 13-mal hintereinander abwechselnd die Ziffern 8 und 9, so erhält man die Ziffernsumme 221. Eine Ziffer muss also 1 sein. Es folgt die

Antwort:

Die kleinste Anzahl von Ziffern, die N haben kann, ist 27.

Magisches Quadrat

Die 9 kleinsten positiven ungeraden Zahlen werden in ein magisches Quadrat so eingetragen, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile, Spalte und Diagonale gleich groß ist.
Wie groß ist die Summe $A + E$?

A	1	B
5	C	13
D	E	3

Lösung:

Wegen $A + 1 + B = B + 13 + 3$ muss $A = 15$ sein. Wegen $5 + C + 13 = 1 + C + E$ muss $E = 17$ sein. Daraus folgt die

Antwort:

Die Summe $A + E$ ist 32.